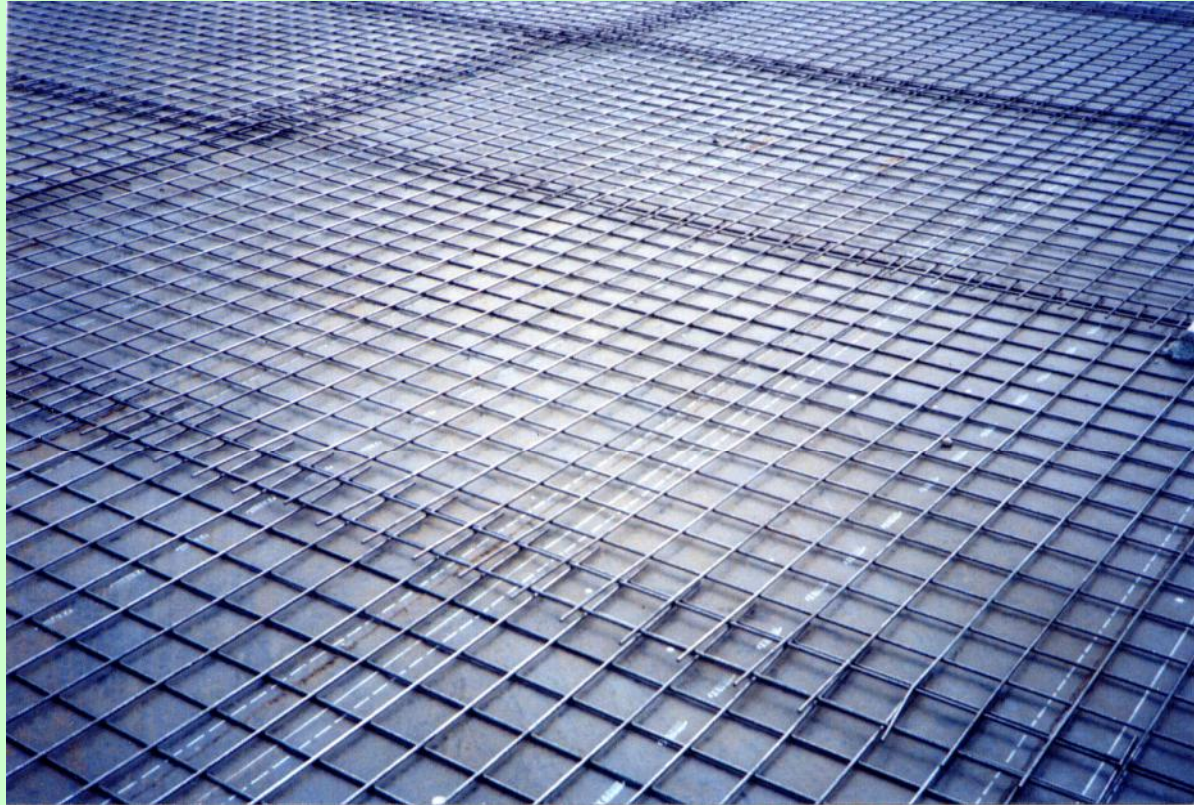


施工估價



第二章 長度、面積與體積計算

§2-0 學習重點

(一)長度計算→圓形周長、扇形弧長、正多邊形

(二)面積計算→三角形、平行四邊形、菱形、梯形、正多邊形、圓形、中空圓形、
欠中空圓、扇形面積、橢圓、拋物線、不規則平面、正方體、長方體、角柱
體、圓柱體

(三)體積→方體、圓柱體、圓錐體、三角錐

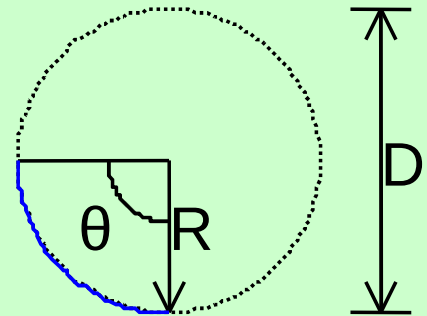
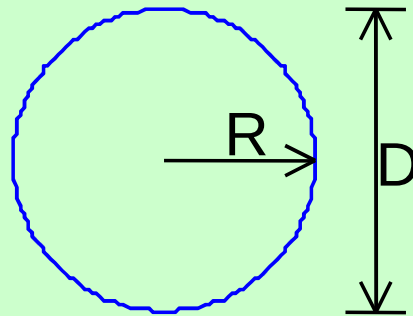


§2-1 長度計算

§2-1-1 圓形

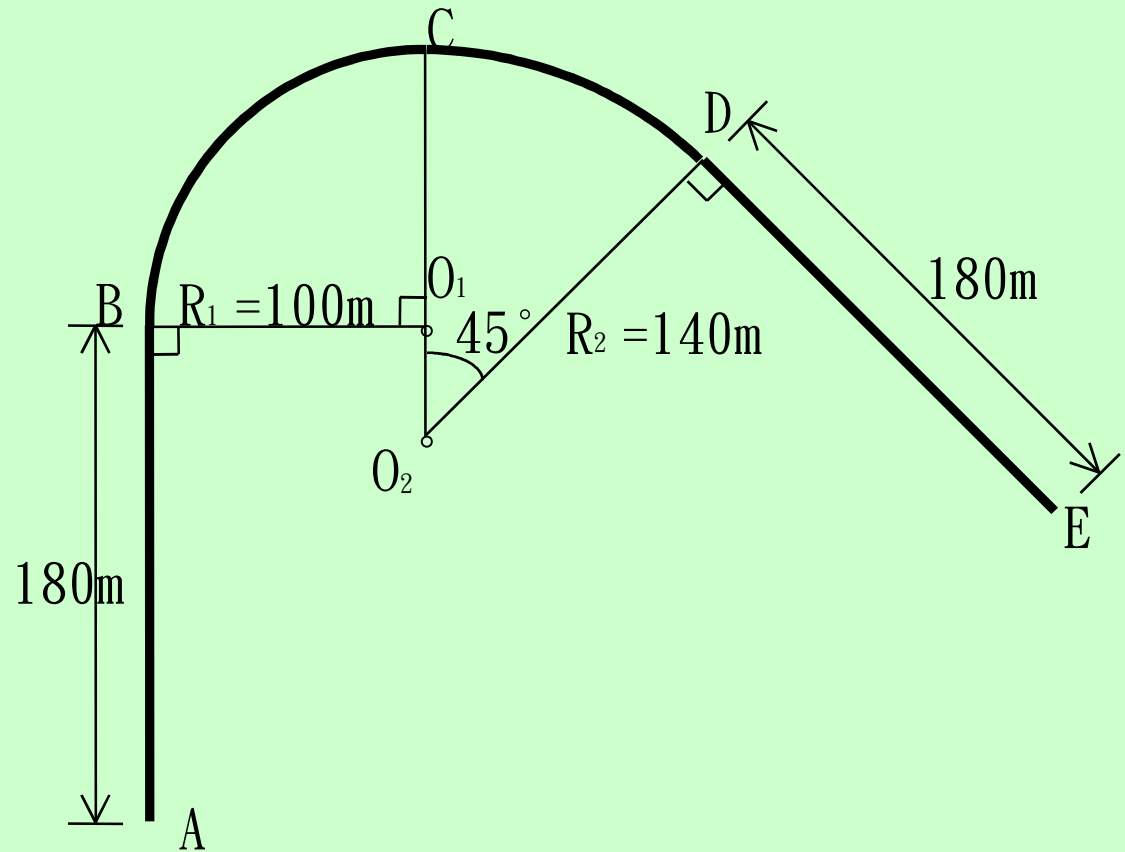
(一)圓形周長 $= \pi D = 2 \pi R$

(二)扇形弧長 $= \frac{\theta}{360} \times \pi D = \frac{\theta}{180} \times \pi R$



【例題2-1-1】

如圖所示之道路，試計算道路(中心線)之總長度。



<參考解答>

$$BC \text{ 弧長} = \frac{90^\circ}{180^\circ} \times \pi \times 100 = 157.08\text{m}$$

$$CD \text{ 弧長} = \frac{45^\circ}{180^\circ} \times \pi \times 140 = 109.96\text{m}$$

$$\text{道路總長度} = 180 + 157.08 + 109.96 + 180 = 627.04\text{m}$$

§2-1-2 多邊形

(一)已知 n 、 S

$$\text{總邊長} = nS$$

(二)已知 n 、 R

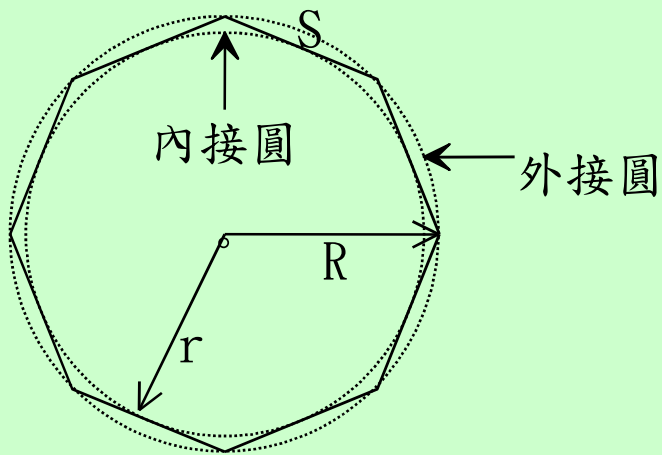
$$\text{總邊長} = 2nR \sin \frac{180^\circ}{n}$$

(三)已知 n 、 r

$$\text{總邊長} = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n}$$

(四)已知 n 、 R 、 r

$$\text{總邊長} = 2n\sqrt{R^2 - r^2}$$



S : 邊長

n : 邊數

R : 外接圓半徑

r : 內接圓半徑

[正多邊形]

【例題2-1-2】

試依下列各已知條件計算正六邊形之總邊長：

(一)已知邊長=80

(二)已知外接圓半徑=80

(三)已知內接圓半徑=80cos30°

(四)已知內接圓半徑=80cos30°，外 接圓半徑=80

<參考解答>

(一)已知邊長=80

$$\text{總邊長} = 6 \times 80 = 480$$

(二)已知外接圓半徑=80

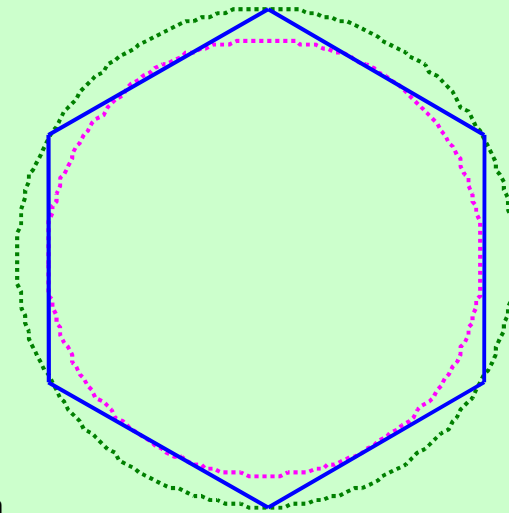
$$\text{總邊長} = 2 \times 6 \times 80 \times \sin \frac{180}{6} = 480$$

(三)已知內接圓半徑=80cos30°

$$\text{總邊長} = 2 \times 6 \times (80 \cos 30^\circ) \tan \frac{180^\circ}{6} = 480$$

(四)已知內接圓半徑=80cos30°，外 接圓半徑=80cm

$$\text{總邊長} = 2n\sqrt{R^2 - r^2} = 2 \times 6 \times \sqrt{80^2 - (80 \cos 30^\circ)^2} = 480$$

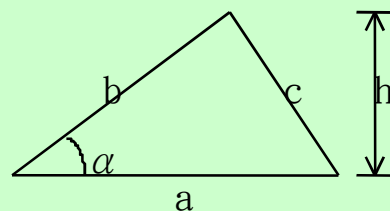


§2-2 面積計算

§2-2-1 三角形

$$\begin{aligned}\text{三角形面積} &= a \times h \div 2 \\ &= a b \sin \alpha \div 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \\ S &= \frac{(a+b+c)}{2}\end{aligned}$$



【例題2-2-1】

如圖所示，試以三斜法計算三角形之面積。

<參考解答>

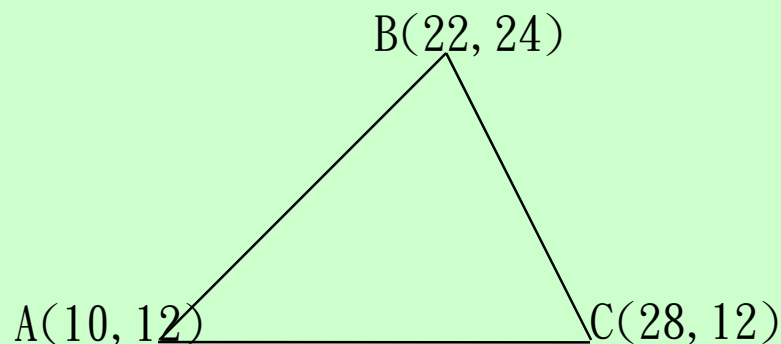
$$\overline{AB} = \sqrt{(10-22)^2 + (12-24)^2} = 16.97$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(22-28)^2 + (24-12)^2} = 13.42$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(10-28)^2 + (12-12)^2} = 18$$

$$S = \frac{16.97+13.42+18}{2} = 24.20$$

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \sqrt{24.2(24.2-16.97)(24.2-13.42)(24.2-18)} \\ &= \sqrt{24.2 \times 7.23 \times 10.78 \times 6.2} \\ &= 108.14\end{aligned}$$



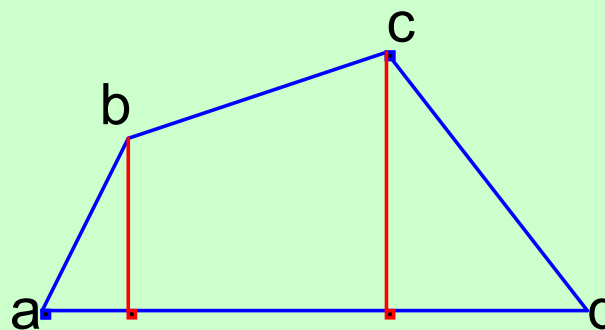
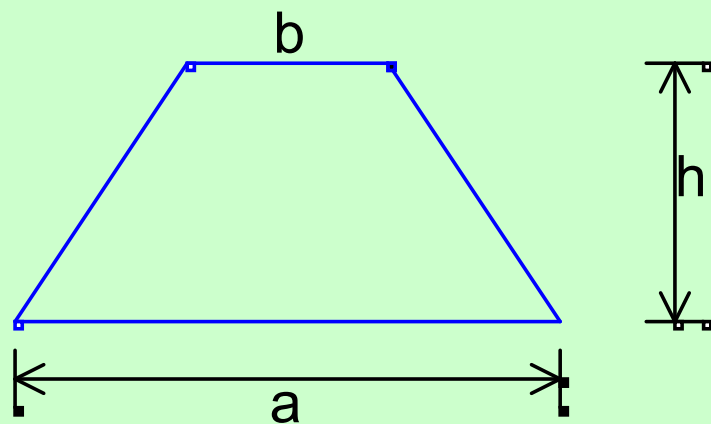
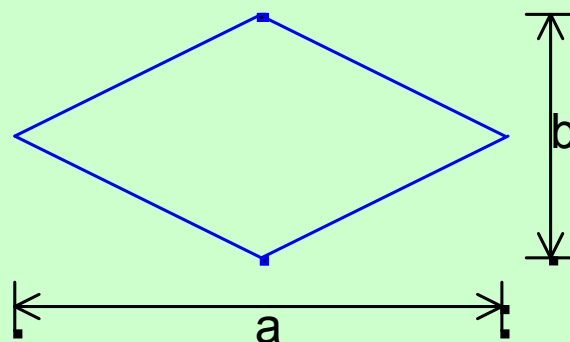
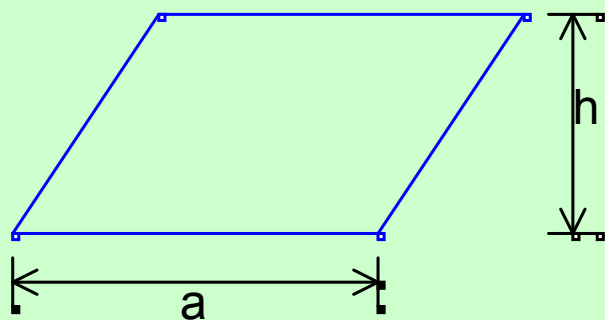
§2-2-2 四邊形

(一) 平行四邊形 → 面積 = $a \times h$

(二) 菱形 → 面積 = $\frac{ab}{2}$

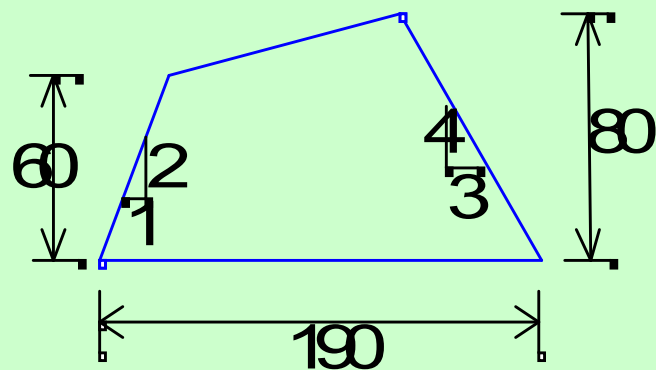
(三) 梯形 → 面積 = $(a + b) \times \frac{h}{2}$

(四) 四邊形 → 將其切成三角形及梯形分別計算後再合計。



【例題2-2-2】

如圖所示，試計算四邊形之面積。



<參考解答>

(一) $\triangle abf$

$$\overline{ab} = 60 \div 2 \times 1 = 30$$

$$\triangle abf \text{ 面積} = 30 \times 60 \div 2 = 900$$

(二) $\triangle cde$

$$\overline{cd} = 80 \div 4 \times 3 = 60$$

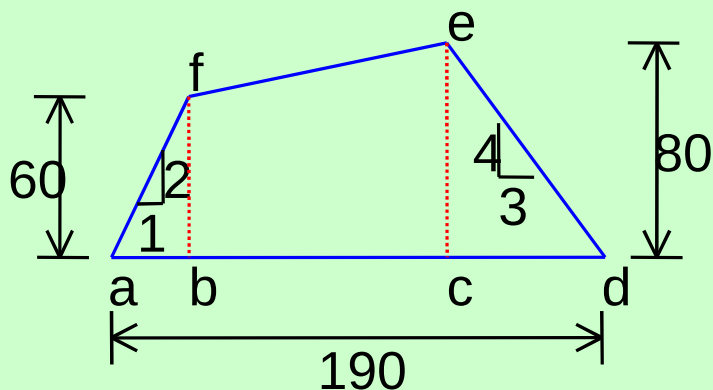
$$\triangle cde \text{ 面積} = 60 \times 80 \div 2 = 2400$$

(三)梯形**bcfe**

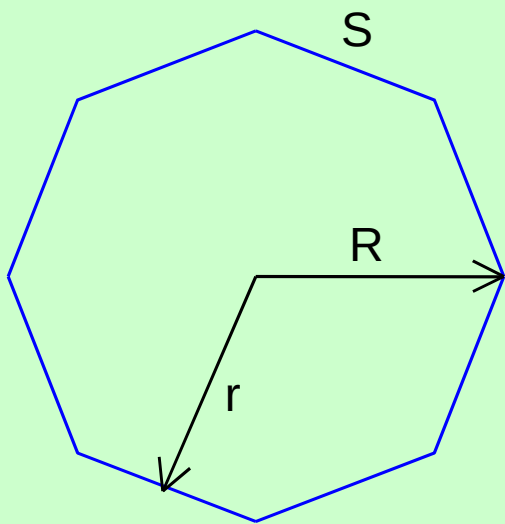
$$\overline{bc} = 190 - 30 - 60 = 100$$

$$\text{梯形} bcef \text{ 面積} = (60 + 80) \times 100 \div 2 = 7000$$

(四)四邊形面積 = $900 + 2400 + 7000 = 10300$



§2-2-3 正多邊形



S：邊長

n：邊數

R：外接圓半徑

r：內接圓半徑

[正多邊形]

(一)已知n、S

$$A = nS^2 / 4 * \cot(180/n)$$

(二)已知n、R

$$A = nR^2 * \sin(180/n) * \cos(180/n)$$

(三)已知n、r

$$A = nr^2 * \tan(180/n)$$

(二)已知n、S、r

$$A = nSr / 2$$

(二)已知n、S、R

$$A = (nS * \sqrt{R^2 - S^2/4}) / 2$$

【例題2-2-3】

如圖所示，試依下列各已知條件計算正八角形之面積：

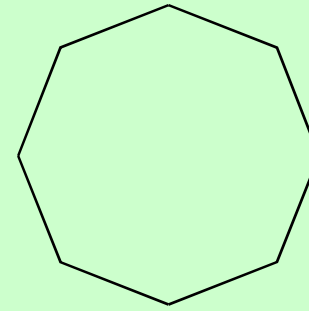
(一)已知邊長=160sin22.5°

(二)已知外接圓半徑=80cm

(三)已知內接圓半徑=80cos22.5°

(四)已知邊長=160sin22.5°，內接圓半徑=80cos22.5°

(五)已知邊長=160sin22.5°，外接圓半徑=80cm



<參考解答>

(一)已知邊長=160sin22.5°

$$\text{面積} = \frac{nS^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n} = \frac{8(160 \sin 22.5^\circ)^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{8} = 18,101.93$$

(二)已知外接圓半徑=80cm

$$\text{面積} = nR^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} = 8 \times 80^2 \sin \frac{180^\circ}{8} \cos \frac{180^\circ}{8} = 18,101.93$$

(三)已知內接圓半徑=80cos22.5°

$$\text{面積} = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n} = 8 \times (80 \cos 22.5^\circ)^2 \tan \frac{180^\circ}{8} = 18,101.93$$

(四)已知邊長=160sin22.5°，內接圓半徑=80cos22.5°

$$\text{面積} = \frac{1}{2} nSr = \frac{1}{2} \times 8 \times (160 \sin 22.5^\circ) \times (80 \cos 22.5^\circ) = 18,101.93$$

(五)已知邊長=160sin22.5°，外接圓半徑=80

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{1}{2} nS \sqrt{R^2 - \frac{S^2}{4}} = \frac{1}{2} \times 8 \times (160 \sin 22.5^\circ) \sqrt{80^2 - \frac{(160 \sin 22.5^\circ)^2}{4}} \\ &= 18,101.93 \end{aligned}$$

§2-2-4 多邊形

(一)座標法

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \cdots & X_n & X_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & \cdots & y_n & y_1 \end{array} \right)$$

$$\text{面積} = [(x_2y_1 + x_3y_2 + \cdots + x_1y_n) - (x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1)] \div 2$$

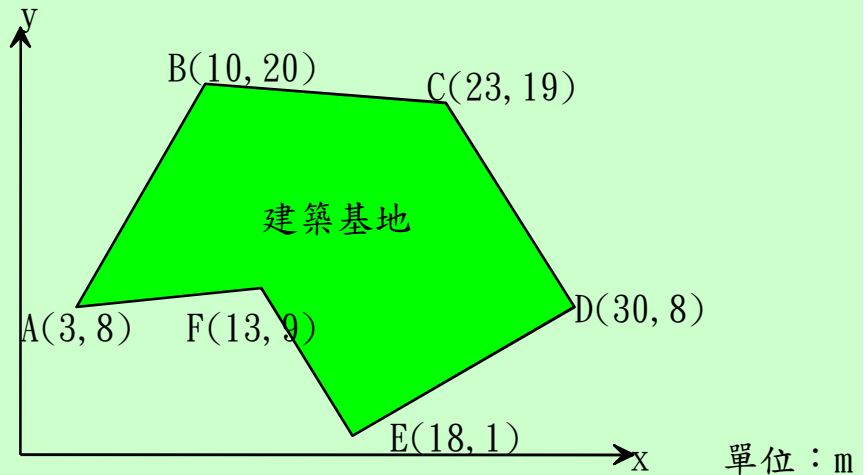
【例題2-2-4】

如圖所示，有一六邊形之建築基地，試以座標法計算該基地之面積。

<參考解答>

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & A \\ 3 & 10 & 23 & 30 & 18 & 13 & 3 \\ 8 & 20 & 19 & 8 & 1 & 9 & 8 \end{array} \right)$$

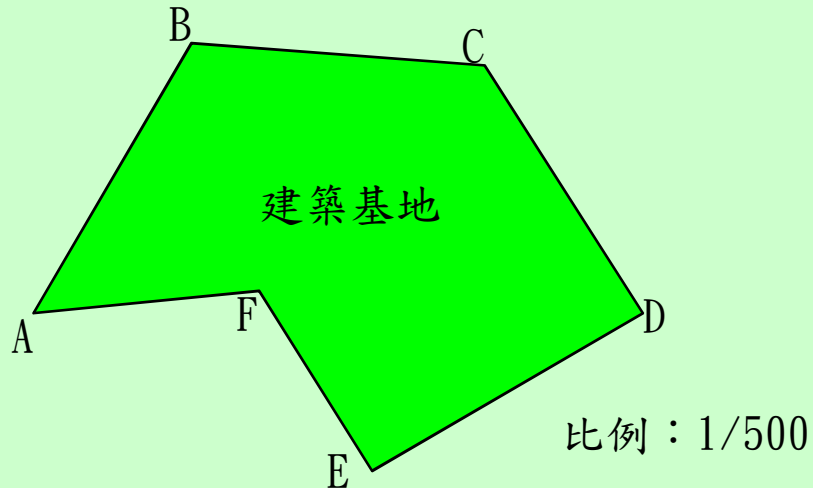
$$\begin{aligned} \text{面積} &= [(10 \times 8 + 23 \times 20 + 30 \times 19 + 18 \times 8 + 13 \times 1 + 3 \times 9) - \\ &\quad (3 \times 20 + 10 \times 19 + 23 \times 8 + 30 \times 1 + 18 \times 9 + 13 \times 8)] \div 2 \\ &= 282\text{m}^2 \end{aligned}$$



(二)三角形法

【例題2-2-5】

如圖所示，有一六邊形之建築基地，試以三角形法計算該基地之面積。



<參考解答>

將多邊形ABCDEF分割成 $\triangle ABF$ 、 $\triangle BCF$ 、 $\triangle CDF$ 、 $\triangle DEF$

以比例尺量測各三角形之底及高，則三角形面積

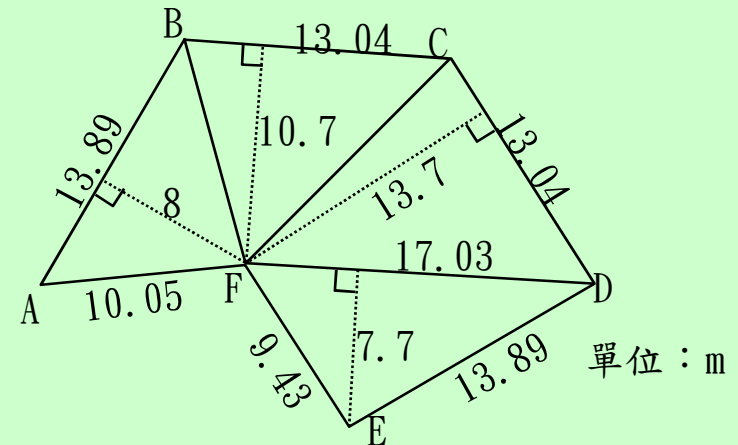
$$\triangle ABF = 13.89 \times 8 \div 2 = 55.56$$

$$\triangle BCF = 13.04 \times 10.7 \div 2 = 69.76$$

$$\triangle CDF = 13.04 \times 13.7 \div 2 = 89.32$$

$$\triangle DEF = 17.03 \times 7.7 \div 2 = 65.57$$

$$\text{多邊形ABCDEF面積} = 55.56 + 69.76 + 89.32 + 65.57 = 280.21 \text{m}^2$$

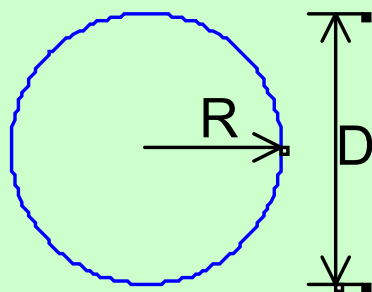


§2-2-5 圓形

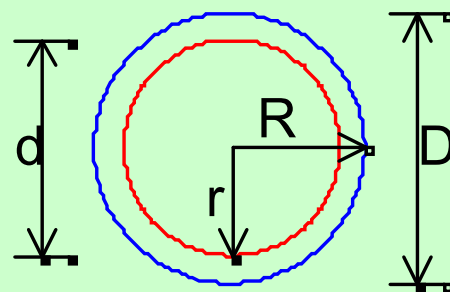
(一)圓形→面積 $=\pi R^2=\frac{\pi D^2}{4}$

(二)中空圓形→面積 $=\pi(R^2-r^2)=\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$

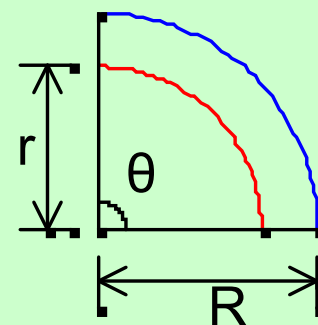
(三)欠中空圓→面積 $=\frac{\theta}{360}\pi(R^2-r^2)$



【圓形】



【中空圓】



【欠中空圓】

【例題2-2-4】

有一道路如圖所示，試計算該道路之面積。

<參考解答>

(一)轉彎部分面積

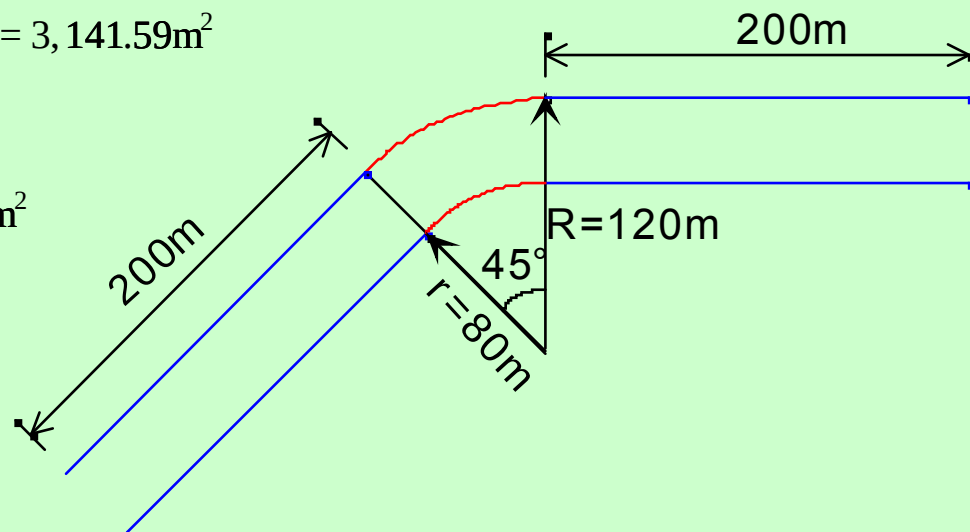
$$(1) \text{大小扇形面積相差法} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (120^2 - 80^2) = 3,141.59\text{m}^2$$

(2)道路中心線弧長×道路寬度

$$= \frac{45^\circ}{180^\circ} \times \pi \times \left(\frac{120+80}{2} \right) \times (120 - 80) = 3,141.59\text{m}^2$$

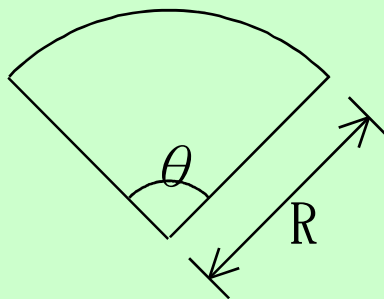
(二)直線部分=200×(120－80)×2=16,000m²

(三)道路面積=3,141.59+16,000=19,141.59m²



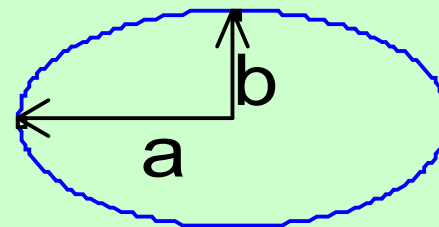
§2-2-6 扇形

$$\text{扇形面積} = \frac{\theta}{360^\circ} \pi R^2$$



§2-2-7 橢圓

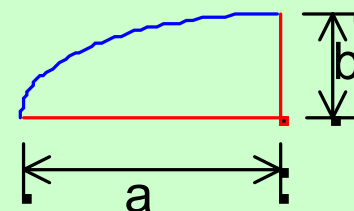
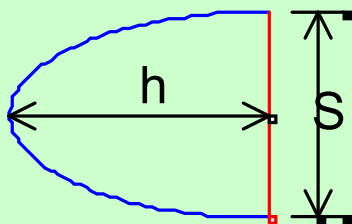
橢圓面積 = πab



§2-2-8 拋物線

拋物線面積 = $\frac{2}{3} Sh$

半拋物線面積 = $\frac{2}{3} ab$

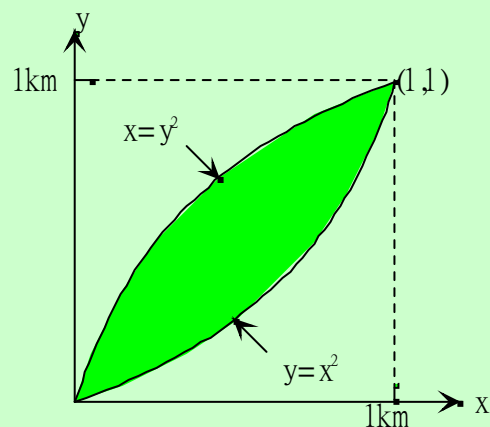


【例題2-2-6】

如圖所示，試求由拋物線 $y=x^2$ 及 $x=y^2$ 所圍區域之建地面積。

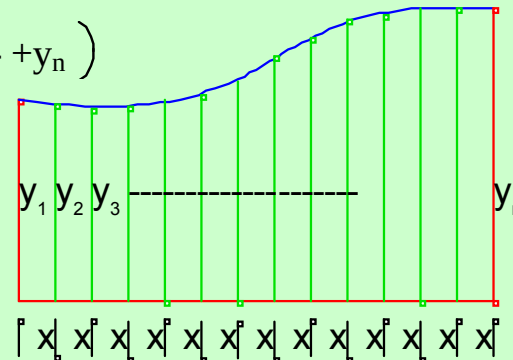
<參考解答>

$$\begin{aligned}\text{面積} &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \\ &= \left| \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \text{km}^2\end{aligned}$$



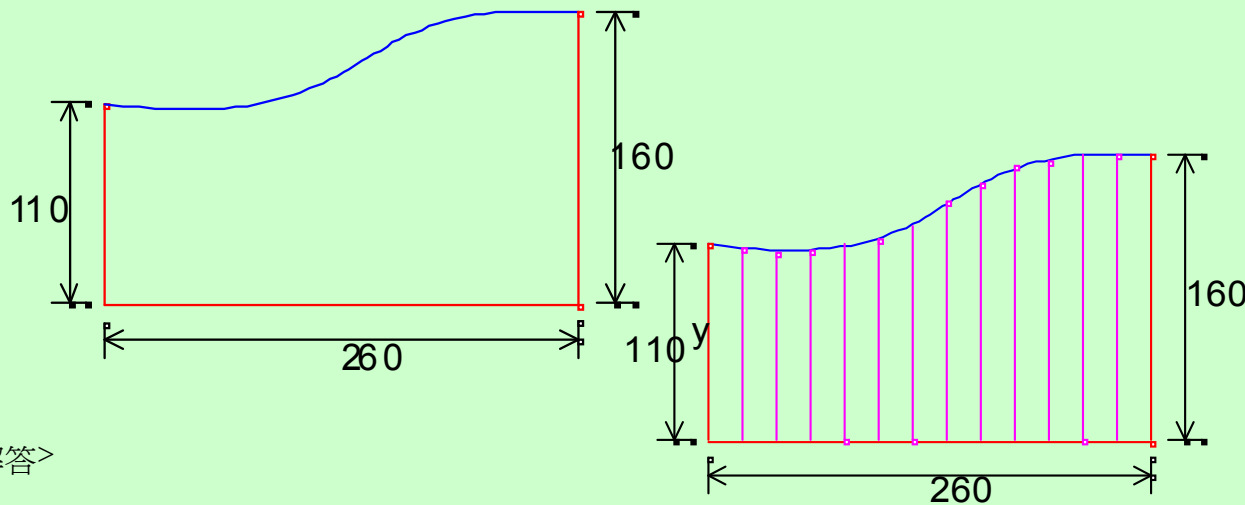
§2-2-9 不規則平面

不規則平面面積 = $\frac{x}{3} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \dots + y_n)$



【例題2-2-7】

如圖所示，有一不規則之平面，試求其面積。



<參考解答>

將該平面劃分成13塊之長條形小面積，每塊之寬度為20 其各分塊之邊長分別為110、108、107、108、110、114、120、132、144、153、158、161、160、160

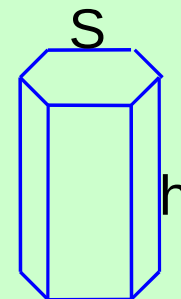
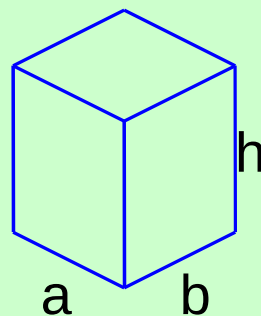
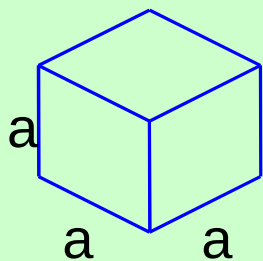
$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{20}{3} (110 + 4 \times 108 + 2 \times 107 + 4 \times 108 + 2 \times 110 + 4 \times 114 + 2 \times 120 + \\ &\quad 4 \times 132 + 2 \times 144 + 4 \times 153 + 2 \times 158 + 4 \times 161 + 2 \times 160 + 160) \\ &= 33,146.67 \end{aligned}$$

§2-2-9 方體

(一) 正方體表面積 $= 6a^2$

(二) 長方體表面積 $= 2(ab + bh + ah)$

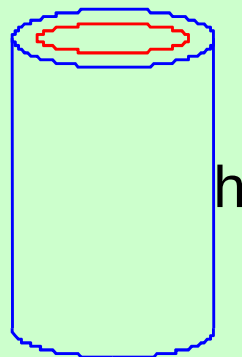
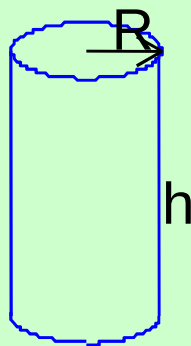
(三) 角柱體表面積 $= 2\left(\frac{nS^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}\right) + nsh$



§2-2-10 圓柱體

圓柱體表面積 $= 2\pi R(R+h)$

圓筒表面積 $= 2\pi (R^2 - r^2 + Rh + rh)$

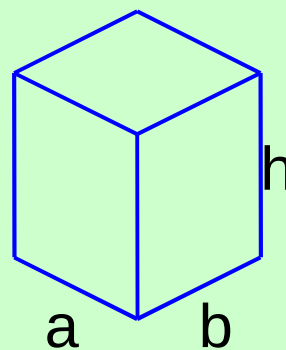
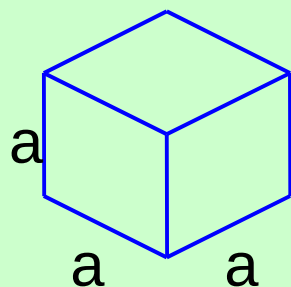


外徑：R

內徑：r

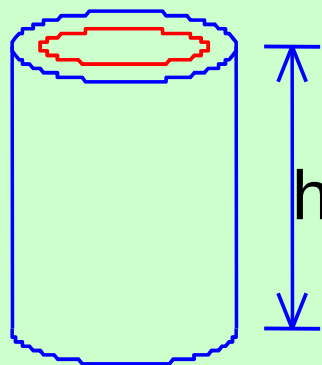
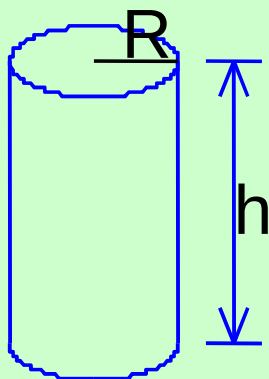
§2-3 體積

§2-3-1 方體



§2-3-2 圓柱體

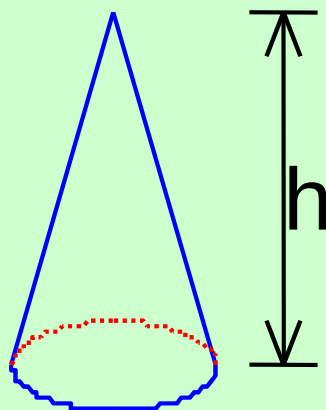
$$\begin{aligned}\text{圓柱體體積} &= \pi R^2 h \\ \text{圓筒體積} &= \pi h(R^2 - r^2)\end{aligned}$$



內徑 = r
外徑 = R

§2-3-3 圓錐體

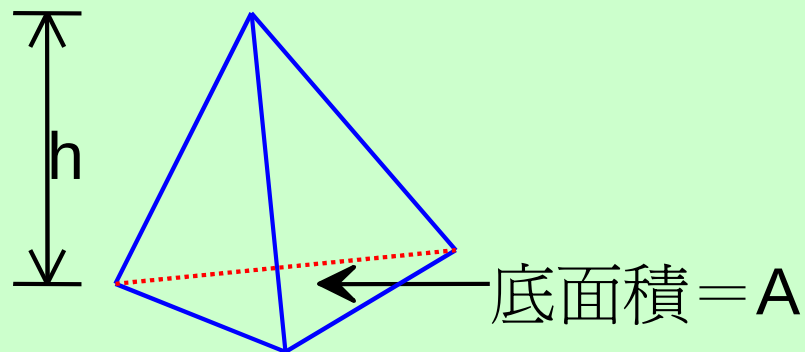
$$\text{圓錐體體積} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



半徑 = R

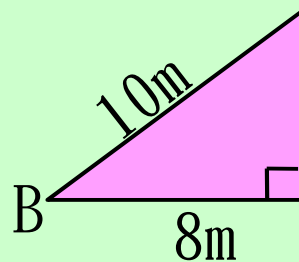
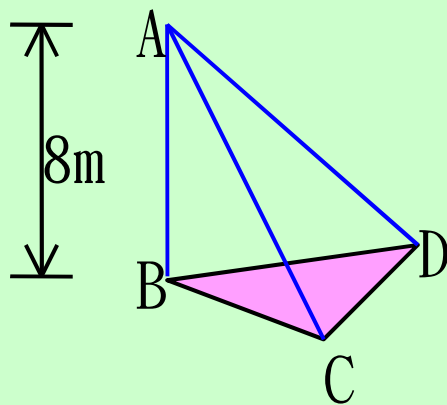
§2-3-4 三角錐

$$\text{三角錐體積} = \frac{1}{3}Ah$$



【例題2-3-1】

如圖所示，試計算三角錐之體積。



[底面平面]

<參考解答>

$$\triangle BCD \quad \overline{CD} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\text{m}$$

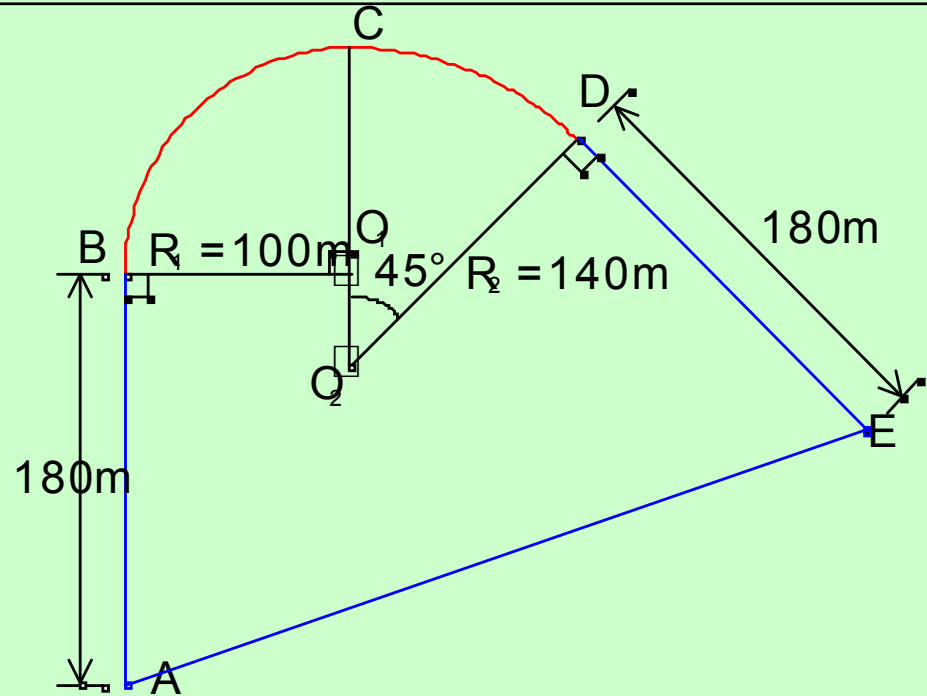
$$\text{底面積} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24\text{m}^2$$

$$\text{三角錐體積} = \frac{1}{3} \times 24 \times 8 = 64\text{m}^3$$

本章結束

【例題2-2-5】

有一建築基地如圖所示，試計算該建築基地之面積。



<參考解答>

□O₂CGD中

$$\angle CGD = 360^\circ - 45^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 135^\circ$$

$$\angle CGK = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

△GFK中

$$\angle FKG = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

△JEK中

$$\angle JEK = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\overline{FC} = R_1 = 100\text{m} = \overline{BF}$$

$$\overline{CG} = R_2 \tan \frac{45^\circ}{2} = 140 \times \tan 22.5^\circ = 57.99\text{m} = \overline{DG}$$

$$\overline{FG} = \overline{FC} + \overline{CG} = 100 + 57.99 = 157.99\text{m}$$

$$\overline{KG} = \overline{FG} \times \sec 45^\circ = 157.99 \times \sec 45^\circ = 223.43\text{m}$$

$$\overline{KF} = \overline{FG} \times \cot 45^\circ = 157.99 \times \cot 45^\circ = 157.99\text{m}$$

$$\overline{AK} = 157.99 + 100 + 180 = 437.99\text{m}$$

$$\overline{EK} = 180 + 57.99 + 223.43 = 461.42\text{m}$$

